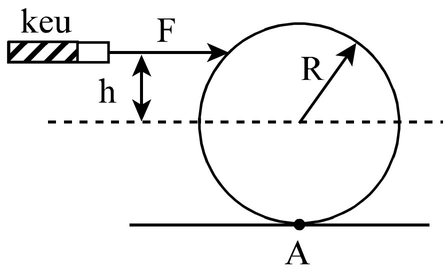
**TENTAMEN MECHANICA** **2 april 2004** **tijd: 09:00 - 12:00 uur**

MAAK **ELKE OPGAVE** OP EEN **APART BLAD** voorzien van je **naam** en **studentnummer**

$$Cijfer = \frac{1}{3}\sum punten + 1$$

## Opgave 1. Biljart




Als men een biljartbal met een keu aanstoot is de wijze van voortbewegen van de bal sterk afhankelijk van de plaats waar de keu de bal raakt. De homogene bal, met massa $m$ en straal $R$ rust in het punt A op het biljart, dat precies horizontaal staat. Met de keu wordt een constante kracht $F$ horizontaal uitgeoefend (zie tekening) gedurende een korte tijd $\Delta t_0$. Daardoor krijgt het zwaartepunt van de bal een snelheid $v_0$.

1p ☐ a. Druk de snelheid $v_0$ uit in de gegeven grootheden.

2p ☐ b. Behalve voortbewegen gaat de bal ook draaien; daarbij is het traagheidsmoment van belang. Geef het traagheidsmoment van de bal ten opzichte van een as door het zwaartepunt.

2p ☐ c. Na de stoot gaat de bal om een horizontale as door het zwaartepunt draaien met een hoeksnelheid $\omega_0$. Bereken het verband tussen $\omega_0$ en de snelheid $v_0$ als functie van de hoogte $h$ waarmee de keu de bal ten opzichte van het centrum raakt. (NB. **In het algemeen slipt de bal!**)

De voorwaartse snelheid van de bal in het punt A is $v_A = v - \omega R$. Zolang deze snelheid ongelijk is aan nul, ondervindt de bal een constante wrijvingskracht $F_W$ van het biljart, waardoor de grootte van de snelheid $v_A$ afneemt. Veronderstel dat deze wrijvingskracht gedurende een tijd $\Delta t_1$ werkt.

1p ☐ d. Geef de eindsnelheid $v_1$ uitgedrukt in de beginsnelheid $v_0$, de wrijvingskracht $F_W$ en $\Delta t_1$.

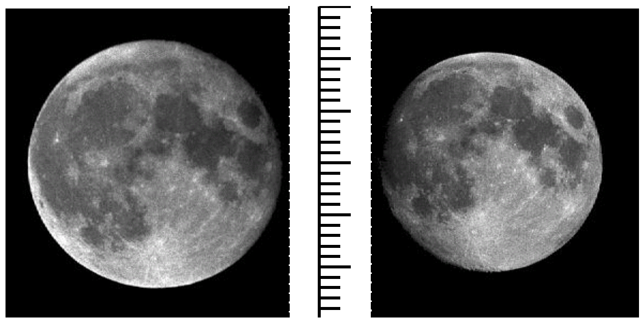
1p ☐ e. De wrijving heeft ook tot gevolg dat de hoeksnelheid verandert. Geef de eindhoeksnelheid $\omega_1$ uitgedrukt in de beginhoeksnelheid $\omega_0$, de wrijvingskracht $F_W$ en $\Delta t_1$.

2p ☐ f. Bereken de eindsnelheid $v_1$ uitgedrukt in de beginsnelheid $v_0$ als $h = 0$. (HINT: bedenk wat $v_A$ is op het moment dat de wrijvingskracht niet meer werkt.)

## Opgave 2. De Maan

| | |
|---|---|
| Massa van de Aarde | = 5,976 . $10^{24}$ kg |
| Massa van de Maan | = 0,074 . $10^{24}$ kg |
| Gravitatiekonstante G | = 6,673 . $10^{-11}$ Nm$^2$kg$^{-2}$ |
| Eén maand | = 27,32 dagen |

Hiernaast zie je twee foto's van de Maan. Links staat de Maan in het *perigeum* en rechts in het *apogeum*. Uit het verschil in grootte blijkt dat de baan van de Maan om de Aarde een beetje elliptisch is.



2p ☐ a. Bereken de lengte $2a$ van de lange as van de ellipsvormige baan met gebruikmaking van de omlooptijd $T$ van de Maan. (Mocht je de relatie niet kennen, probeer deze dan af te leiden voor een cirkelvormige baan).

2p ☐ b. Bereken uit schijnbare afmetingen van de Maan de excentriciteit van de ellips. Verwaarloos hierbij het feit dat echte afstand van de waarnemer tot het Maanoppervlak kleiner is dan de afstand tussen het centrum van de Maan en de Aarde.

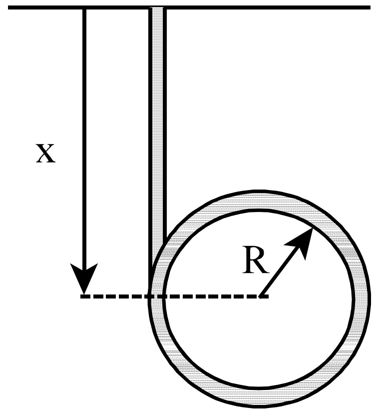
Het oppervlak van een ellips met lange as $2a$ en excentriciteit $\varepsilon$ is: $A = \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$

3p ☐ c. Bereken het impulsmoment van de Maan (bedenk wat de relatie is tussen de Perkenwet van Kepler en het behoud van impulsmoment).

2p ☐ d. Bereken de snelheid van de Maan in het perigeum.

>>>> Zie voor de derde opgave de andere zijde van dit blad.

Opgave 3. Een afrollend touw




Een homogeen touw met massa $m$ en lengte $l$ zit aan een kant vast aan een plafond terwijl het andere einde opgerold is om een massaloze huls met straal $R$. Op een gegeven moment laat men het opgerolde einde los. Daarbij veronderstellen we dat het afgerolde deel van het touw verticaal hangt.

2p ☐ a. Bereken de potentiële energie $U(x)$ waarbij $x$ de lengte van het afgerolde deel van het touw is. De potentiële energie bestaat uit twee delen: het deel dat nog opgerold is en het deel van het touw dat vertikaal hangt. Veronderstel dat $U(0) = 0$.

1p ☐ b. Bereken het traagheidsmoment van het opgerolde deel ten opzichte van centrum van de huls, uitgedrukt in $x$.

2p ☐ c. Bereken de kinetische energie, uitgedrukt in $x$ en $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Bedenk dat het zwaartepunt van de rol naar beneden beweegt en dat de rol tegelijkertijd draait.

1p ☐ d. Bereken de snelheid van het centrum van de huls als het touw voor de helft is afgerold, dus als $x = \frac{l}{2}$.

3p ☐ e. Bereken met de Lagrange-vergelijking de versnelling $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ voor $x = \frac{l}{2}$.

UITWERKINGEN 05-04-2004

1a. $F.\Delta t_0 = mv_0 \quad \rightarrow \quad v_0 = \dfrac{F.\Delta t_0}{m}$

b. $I_{CM} = \dfrac{2}{5}mR^2$

c. $F.h.\Delta t_0 = I_{CM}.\omega_0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \dfrac{F.h.\Delta t_0}{I_{CM}} = \dfrac{mv_0h}{\frac{2}{5}mR^2} = \dfrac{5}{2}\dfrac{h}{R^2}v_0$

d. $m(v_0 - v_1) = F_W.\Delta t_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = v_0 - \dfrac{F_W.\Delta t_1}{m}$

e. $I_{CM}.(\omega_1 - \omega_0) = F_W.\Delta t_1 R \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \omega_0 + \dfrac{F_W.\Delta t_1 R}{I_{CM}}$

f. Als $h = 0$ volgt: $\omega_0 = 0$ en als $v_A = 0$ geldt: $v_1 = \omega_1 R$ zodat:

$v_1 = v_0 - \dfrac{I_{CM}}{mR}\omega_1 = v_0 - \dfrac{\frac{2}{5}mR^2}{mR}\dfrac{v_1}{R} = v_0 - \dfrac{2}{5}v_1$ zodat: $v_1 = \dfrac{5}{7}v_0$

2a. $a^3 = \dfrac{GM_{aarde}}{4\pi^2}.T^2$ dus $a = 3{,}83.10^8$ m en de lange as is: $2a = 7{,}66.10^8$ m

b. De verhouding van diameters in het perigeum en apogeum is: $\dfrac{25}{21{,}5} = 1{,}163$ ; dus

$\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1{,}163$ zodat $\varepsilon = \dfrac{1{,}14 - 1}{1{,}14 + 1} = 0{,}075$

c. Het impulsmoment is: $L = m\omega r^2 = 2m\dfrac{dA}{dt} = 2m\dfrac{\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T} = 2{,}88.10^{34}$ kgm²/s

d. In het perigeum is de afstand Aarde-Maan: $r_- = a(1 - 0{,}075) = 3{,}5.10^8$ m

zodat de snelheid daar is: $v_- = \dfrac{L}{mr_-} = 1{,}1.10^3$ m/s

3a. $U = -m\dfrac{l-x}{l}gx - m\dfrac{x}{l}g\dfrac{x}{2} = -mg(x - \dfrac{x^2}{2l})$

b. $I_{CM} = m\dfrac{l-x}{l}R^2$

c. $T = \dfrac{1}{2}\dfrac{l-x}{l}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{l-x}{l}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}m\dfrac{l-x}{l}R^2\dot{\theta}^2 = m\dfrac{l-x}{l}\dot{x}^2$

d. Uit behoud van energie volgt: $m\dfrac{l-x}{l}\dot{x}^2 = mg(x - \dfrac{x^2}{2l})$ voor $x = \dfrac{l}{2}$ volgt dan: $\dot{x}_{x=\frac{l}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}gl}$

e. $L = m(1 - \dfrac{x}{l})\dot{x}^2 + mg(x - \dfrac{x^2}{2l})$

$\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2m(1 - \dfrac{x}{l})\ddot{x} - 2m\dfrac{\dot{x}^2}{l} + \dfrac{m}{l}\dot{x}^2 - mg(1 - \dfrac{x}{l}) = 0$

daaruit volgt voor $x = \dfrac{l}{2}$ : $\ddot{x} = \dfrac{g}{2} + \dfrac{\dot{x}^2}{2(l-x)} = \dfrac{5}{4}g$